

Title	高速回転気体力学とスペースコロニーの気象学(ナビエ・ストークスの方程式の解)
Author(s)	松田, 卓也; 中川, 敬三
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 477: 101-116
Issue Date	1983-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/103336
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

高速回転気体力学とスペースコロニーの気象学

京大工 航空工学 松田卓也

中川敬三

(Matsuda Takuya, Nakagawa Keizo)

1. はじめに

回転流体力学でとり扱う対象は、回転流体である。

回転流体とは、回転している流体なら何でもよさそうに思うが、そうでもない。回転流体力学が扱うのは、コリオリ力が重要な役割をはたす回転流体なのである。コリオリ力の大きさの物指として、ロスビー数がある。

$$\begin{aligned} \text{ロスビー数} = \beta &= \frac{\text{非線型力}}{\text{コリオリ力}} = \frac{|(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}|}{|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V}|} \\ &= \frac{V^2/L}{\Omega V} = \frac{V}{L\Omega} = \frac{\text{流速}}{\text{周速}}, \end{aligned} \tag{1-1}$$

ここで V , L , Ω は系の典型的な速度、長さ、角速度である。コリオリ力が重要な系とは、 $\beta \ll 1$ が成り立つ系、つまり典型的な流速が、例えば容器の周辺の速度 $L\Omega$ に比べて小さいような系である。気象学や海洋学の扱う流体が、この範

疇に入るのは、 L が大きいからであり、 V が大きいからではない。風呂桶の中の渦は、 L が小さすぎるのでコリオリ力は、ほとんど影響しない。しかし、たとえ小さな容器であれ、気体遠心分離機のように大きな Ω を持つ系は、回転流体として考えることができる。

気象学や海洋学で取り扱う回転流体は、基本的には非圧縮とみなすことができる。その場合、有名な Taylor-Proudman の定理が成立する。この定理は、流速が z に依存しない事を主張しており、その結果、流体が上下一体となって動くという Taylor-Proudman column の現象が生じる。木星の大赤点は、その例ではないかと言われていたが、現在では否定的である。

一方、気体遠心分離機の場合、回転速度が非常に大きいので非圧縮と考えるわけにはいかない。実際、高速回転による成層のため、density scale height が容器の半径と同じかそれより小さくなっている。このような対象を扱う学問が圧縮性回転流体力学で、日本のグループが先駆的な仕事をしてきた。(Sakurai & Matsuda 1974, Nakayama & Usui 1974, レビューとしては、三神 1982) 圧縮性回転流体力学の対象としては、気体遠心分離機の他に、スペースコロニー内の気象学も考えることができる。

2. 回転円柱内の軸対称気体流れ

本論文の主題は、回転円柱内の非軸対称な気体流れであるが、本論に入る前に、これまでの研究で分かっている軸対称流れについてまとめておこう。図1に示すように、 z 軸まわりに角速度 Ω で回転している半径 L の円柱を考える。円柱の内部には、温度 T_0 、分子量 M の気体が入っているとす。その密度分布は、次式で表わされる。

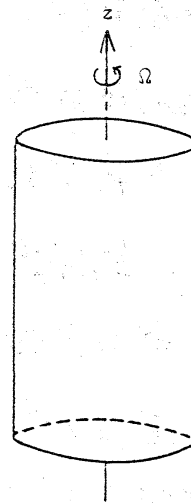


図1

$$\rho = \rho_0 \exp \left\{ \frac{G_0}{2} (r^2 - 1) \right\} \quad (2-1)$$

但し $G_0 = \frac{ML^2\Omega^2}{RT_0} \quad (2-2)$

ρ_0 は壁面での密度、 R は気体定数である。長さは L で無次元化した。 G_0 は周速のマッハ数の二乗にほぼ等しい。 $G_0 \approx O(1)$ が、圧縮性回転流体の特長である。

図2には、円柱内壁にできる境界層を示した。上下壁面に沿っては、無次元厚さが $E^{1/2}$ であるEkman層が形成

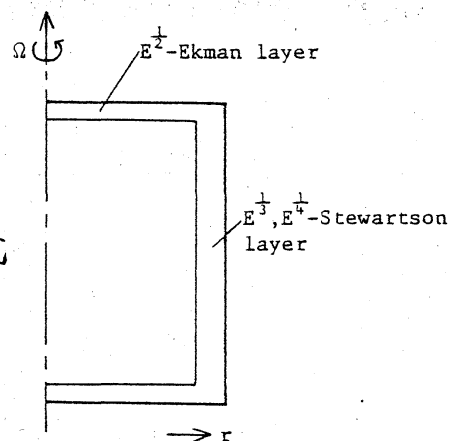


図2 回転円柱内にできる境界層

される。ここで E は、 $E\ddot{r}man$ 数とよばれ次式で定義される。

$$E = \nu / \Omega L^2 \ll 1 \quad (2-3)$$

但しここで、 ν は気体の動粘性係数である。 E が十分小さい場合を我々は考えている。側壁面に沿っては、 $Stewartson$ 層が存在するが、この層は一般には二重構造をしており、それぞれ $E^{1/2}$ 層と $E^{1/4}$ 層である。

さて、気体遠心分離機の内部には、向流 (Counter-Current) を何らかの方法で作る必要がある。そのやり方により、種々の遠心分離機の型がきまる。例えば、上下壁面 (これを端板とよぶ) に温度差をかけて、その浮力を利用する方法である。図3はその例で、上端を下端より少し高温に保ち、側壁の材料の熱伝導が良いと仮定した場合の、子午面流をあらわしている。 $E\ddot{r}man$ 層内には、動径方向に沿う流れ、内部非粘性域には弱い軸方向流れ、 $Stewartson$ 層内に

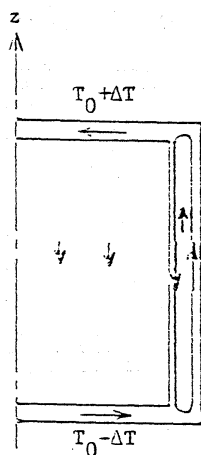


図3 温度差誘起流

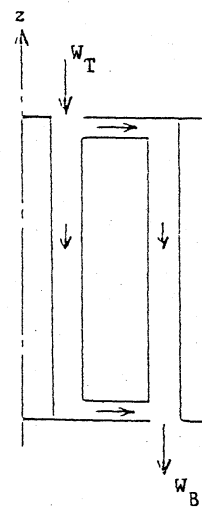


図4 流入出流

は、下の Ekman 層から上の Ekman 層へもどる流れと、E²層内に閉じた循環流が形成される（この循環流は側壁の温度分布によって誘起されたものである）。ここで述べたものと似た流れは、壁の温度は一定に保ち、かつ上下いずれかの回転速度を少し遅くすることによっても達成される。これはスクープによる向流のモデルとなっている。この時、内部非粘性域の流体の回転速度は、上下端板のその相加平均になる。これは後に述べる、非軸対称流れに、対応する現象がある。

軸方向に沿った流れを誘起する手法としては、上下端板から流体を吹き出したり、吸い込んだりすることにより誘起される流れ、いわゆる流入出流を利用する手がある。この流れの特長を図4に示す。例えば上端板から流入した流量のうち半分は、上の Ekman 層内を流れ、他の半分は垂直に下って、下の Ekman 層に達し、そこを通過して動径方向に流れる。上下の Ekman 層内を流れる流量が等しいことが特長である。現実の遠心分離機では、これらの流れを組合せて最適な向流を作る。

3. パイ状円柱の中の流れ

これまでの圧縮性回転流体のほとんどは、軸対称性を仮定

してきた。わずかに Matsuda, Sakurai & Takeda (1975)だけが、非軸対称な流入出について考察した。そこでの結論は、Ekman層内の流れは軸対称でなければならず、流入出口の非軸対称性は、境界層外で解消されること、つまり今まで内部非粘性域とよんでいたものも、もはや非粘性ではないということであった。

ところが上述の研究においても、容器の軸対称性は仮定されていた。その結果、円柱内に軸まわりの温度風、地衝風とよばれる流れの存在を許す。もし、容器が非軸対称で、温度風や地衝風の存在を許さない時に流れはどうなるのかという問題は、実用的観点をはなれても興味深いものである。

そこで一つの例題として図5に示すような容器を考え、これをパイ状円柱とよぼう。このパイ状円柱は、円柱の中心軸のまわりに回転しているとする。

いま簡単のため、円柱の長さは無限大とし、 z 方向の依存性および z 方向の流速を無視する。これは、本質的な制限ではない。線型の問題を扱う限り、 z 依存のある解は、後で求めて重ね合わせることができるからである。

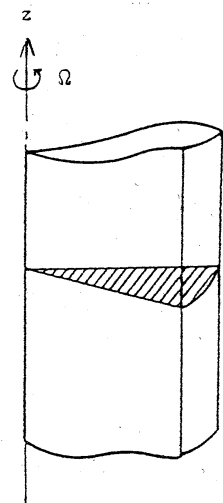


図5 パイ状円柱

パイ状円柱の断面を図6に示す。
 円柱内域は、三つの領域に分けられる。
 $\theta =$ 一定の壁面（動径壁とでもよぼう）に沿っては、無次元厚さが $E^{\frac{1}{2}}$ である浮力層があり、側壁には、厚さが $E^{\frac{1}{2}}$ と $E^{\frac{1}{4}}$ の熱層が存在する。それ以外の部分は、非粘性域である。これらの様子は、図2に示した軸対称円柱内の構造と、非常に良い対応を示している。浮力層が *Ekman* 層に、熱層が *Stewartson* 層に対応している。実際、厚みだけでなく、後に示すように、方程式の間にもよい対応が存在する。

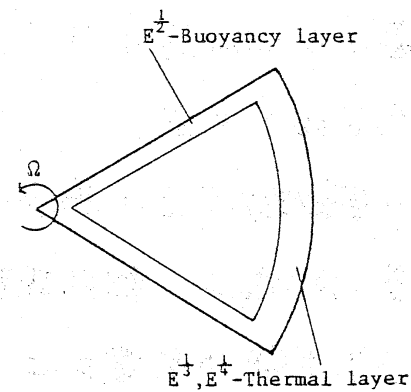


図6 パイ円柱の断面

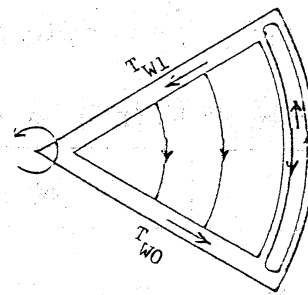


図7 温度差誘起流

図7では、二つの動径壁間に温度差を与えた場合の流れをあらわし、これは、図3の流れと対応している。図8では、動径壁に流入出を与えた場合の流れをあらわし、図4の流れと良い対応関係にある。パイ状円柱の非粘性域では、あらゆる物理

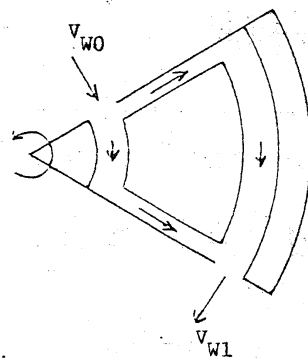


図8 流入出流

量は θ に依存しない。これは、Taylor-Proudman 定理の対応物である。それによつて、Taylor-Proudman column の類似物（この場合は、ドーナツ）が存在するが、この場合の対応は、熱的現象の関与により、それほど自明ではない。また内部の温度は二つの動径壁の温度の相加平均となる。

4. 境界層方程式

以上に見たように、軸対称円柱内の流れとパイ状円柱内の流れには、良い対応がある。それは、基礎方程式の間に良い対応が存在するからである。その関係を次に示そう。

	軸対称円柱	パイ状円柱
$E^{1/2}$ 層	$\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial \eta^4} + 4(1 + hr^2)\rho^2 \hat{u} = 0$	$\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial \eta^4} + 4hr^6\rho^2 \hat{u} = 0$
$E^{1/6}$ 層	$\frac{\partial^6 \overline{T}}{\partial \zeta^6} + 4(1 + h)\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2} = 0$	$\frac{\partial^6 \overline{T}}{\partial \zeta^6} + 4h\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \theta^2} = 0$
内部非粘性域	$\frac{\partial W_i}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

ここで「 η 」のついた量は、境界層内の変数を与えている。 η' , η , ζ は次のようにスケールされた境界層座標である。

$$z = E^{1/2} \eta', \quad \theta = E^{1/2} \eta, \quad 1 - r = E^{1/3} \zeta \quad (4-1)$$

そして、 ϵ は圧縮性を表わすパラメーター（ブリンクマン数）

$$h = (\gamma - 1)P_r G_0 / 4\gamma \quad (4-2)$$

ここで γ は比熱比、 P_r はプラントル数である。

方程式の導出については、Matsuda & Nakagawa (1982)を参照。

この表から次のことが分る。

- (1) 軸対称円柱の Σ とパイ状円柱の θ が対応している。
- (2) 境界層方程式の構造は基本的には同じであるが、完全に同一ではない。特に $\epsilon \rightarrow 0$ の極限（非圧縮の極限）をとると、パイ状円柱では境界層は消滅するが、軸対称円柱では残る。

動径壁上の $E^{1/2}$ 浮力層と似た境界層は、非圧縮 Boussinesq 流体において鉛直壁上に存在する。しかし、 $E^{1/2}$ 熱層は、圧縮性回転流体に特有の境界層である。

二つの $E^{1/2}$ 層は、お互いに重なり合っている。側壁の温度分布が θ 依存の他に Σ 依存も持っている場合、境界層方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^6 \bar{T}}{\partial \zeta^6} + 4(1+h)\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \zeta^2} + 4h\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4-3)$$

この境界層は、一般 Stewartson 層と名づけることができよう。

5. スペースコロニーの気象学 (Matsuda, 1982)

以上に述べた圧縮性回転流体力学は、スペースコロニー内の気象を論ずる場合に役に立つ。スペースコロニーとはアメリカの高エネルギー学者G.K. O'Neill (1974) により提案されたもので、21世紀に人類が宇宙に定住するための大規模宇宙構造物 (Large Scale Space Structure) である。いろいろの案があるが、代表的なものとしては、長さ30km、半径3km程度の円柱で、遠心力によって重力を作るため回転している。

円柱のまわりには、図9に示すように3枚の鏡があり、太陽光を反射して円柱に向ける。円柱の側壁部は、図10の断面図が示すように、各3つづつの陸地と窓部に分れている。鏡で反射した太陽光は、窓を通過して陸地にふりそそぐ。

陸地の上には、人間の居住部がある。鏡の角度を変えることにより昼と夜や季節を作り出すことができる。

O'Neillによれば、コロニー内の気象は地球と似たもので、上空には雲もあり、降雨も調節できると述べている。コロニーの景観や、その内部での生活については、テレビおよび映画のアニメとなった「機動戦士ガンダム」でよく描写されていた。

筆者の疑問点は、はたしてO'Neillの言うように、コロニーの気象と地上のそれが似ているのかという点である。

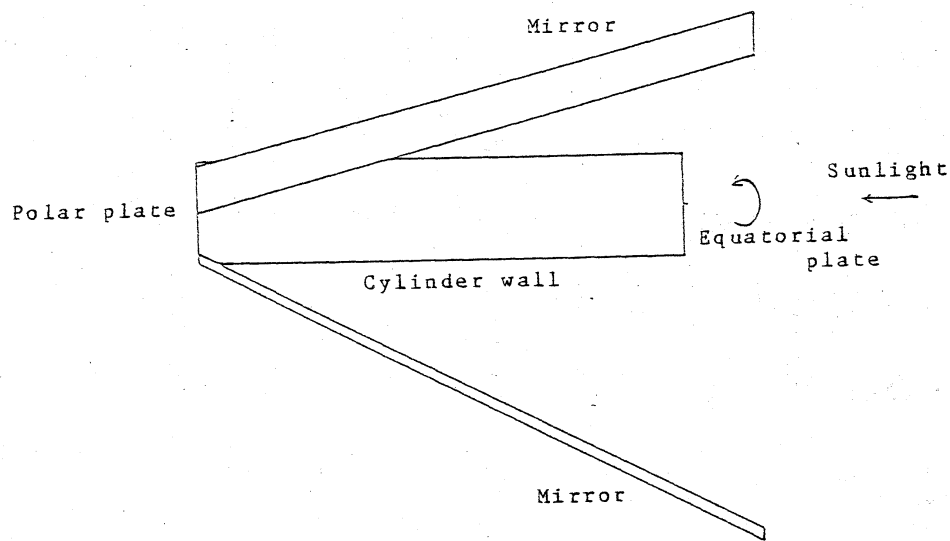


図9 スペースコロニー外観

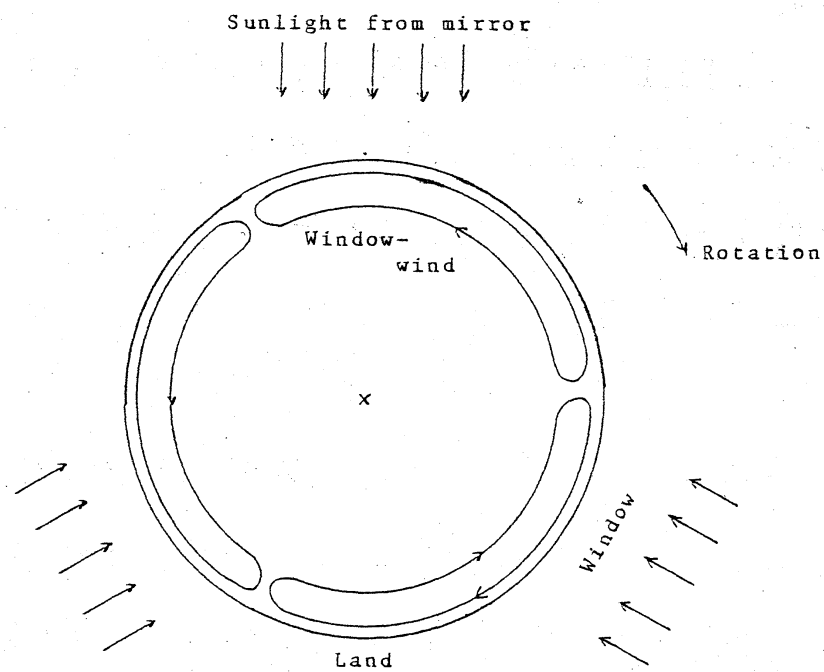


図10 スペースコロニー断面

規模の大小もさることながら、地上の気象を考える際には、地球の回転ベクトルの地上に対する垂直成分が重要であり、従って回転ベクトルは地上に垂直であると考えてよい、一方、コロニー内では回転ベクトルは、地面に平行である、この差は重要であると考えられる。つまり、地球では地面に平行に吹く風に対してコリオリ力が重要となるが、コロニーでは動径方向流れに対してもコリオリ力が大きな効果をあらわす。

ここでは、コロニー内の風系について圧縮性回転流体力学の観点から論じよう。コロニーの側壁で $1g$ の遠心力を作る為には、周速は 170 m/s であり、(2-2)の G_0 は 0.35 となり、圧縮性の影響は無視できないからである。

日中には陸地部は太陽光で熱せられ高温となる。一方、紫外線を防ぐ為に着色された窓ガラス（あるいは偏光窓ガラス）は3Kの宇宙空間に面しており、その結果、低温になっているであろう。陸と窓の温度差が、あたかも地球上で日中に海から陸に向って吹く海風と同様の現象を誘起する。ところが、この風系は厚みが、 E_0 である一般化された *Stewartson* 層の内部にとじこめられている。内部非粘性域（つまり上空）では、温度は r のみの関数であり θ によらない。 E_0 層の役割は、側壁部の温度の θ 依存性を解消するものであ

る(そのため熱層と名づけた)。 E 層内に誘起される流れは、図10に示すようなものであろう。つまり地上部では上昇気流、窓部では下降気流となる。一方の窓岸ではつねに(海風ではなく)窓風(Window-Wind)が吹くことになる。

E 層の厚みは、Ekman数 E の大きさで、従って粘性係数の大きさで定まる。もし分子粘性を採用すれば、 E はとてつもなく小さくなる。しかし、気象現象では渦粘性が重要な役割をはたす。渦粘性係数の大きさを ℓ と評価しよう。ここで ℓ と U は乱れの典型的な大きさと速さである。すると $E = (\ell/L)(U/L\Omega)$ となる。 $\ell/L = 10^{-3} \sim 10^{-2}$, $U/L\Omega = 10^{-2} \sim 10^{-1}$ とすれば $E = 10^{-5} \sim 10^{-3}$ となる。すると、 E 層の典型的な厚みは数百mということになる。

風速は、窓と陸の温度差からきまるロスビー数 β によっている。 $\beta \sim \Delta T/T$ 。だから、温度差を30Kとすれば、 $\beta = 0.1$ 、従って窓風の典型的な風速は17m/sということになる。かなりな強風である。

図11,12に、円柱の1/3部分の計算例を示す。温度分布は、陸地と窓部でそれぞれ温度一定と仮定した。図11は温度分布、図12は流線である。基礎方程式は、 β で線型化してあるので、結果には β は入らない。任意の温度差(もちろん小さいとして)と考えてよい。窓岸での温度

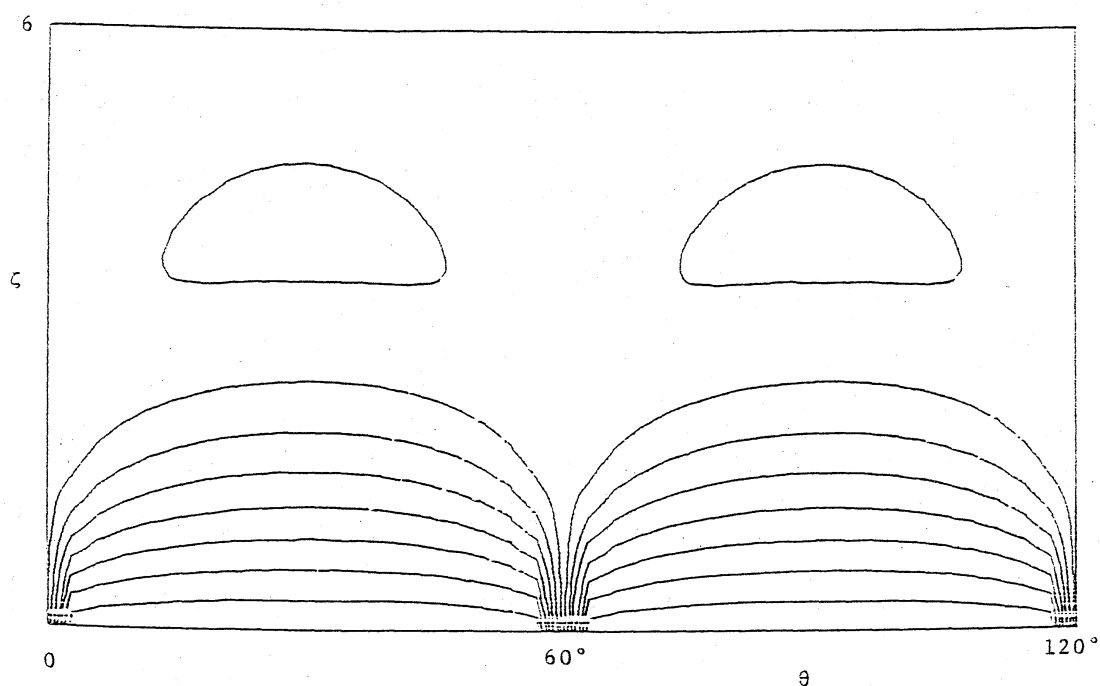


图11 温度分布

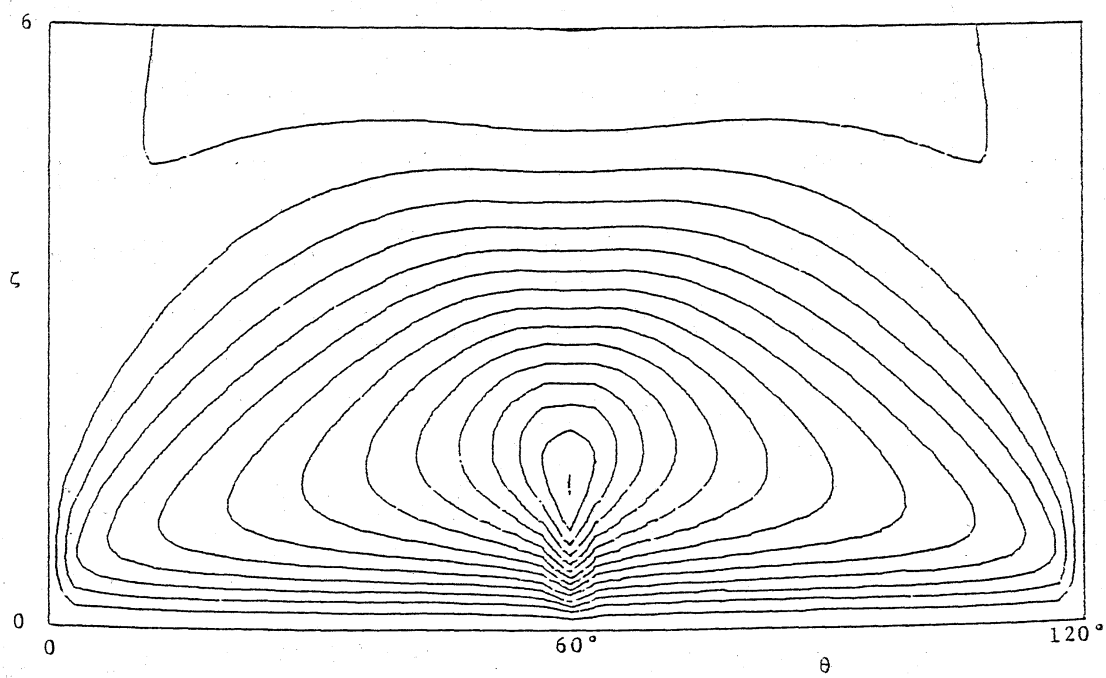


图12 流线

分布の飛びのため、その附近での級数の収束はよくない。

ここで述べた風系は、陸地と窓の温度差によって誘起される、いわば局所的循環であった。一方、太陽に面した端板 (Equatorial plate) と、反した端板 (Polar plate) の温度差によって誘起される、大気大循環も存在する。しかし、この流れは、図3で示した流れと同一のものである。

コロニーの気象学には、その他、様々な問題が存在している。たとえば、上空の温度分布。地球上の対流圏では、ほぼ断熱分布に近い。コロニーの対流圏とは、厚さ数百mのE²層であり、ここでの温度分布は熱伝導できまる。内部非粘性域、つまり成層圏の温度が熱伝導のみできまるなら、それは両端板の温度分布による。第0近似としては等温と考えてよいだろう。太陽光の吸収、散乱を考慮すれば、さらに詳しい温度分布がきまるが、この計算はコロニーの幾何形状を考慮すると、かなり複雑なものとなるであろう。コロニーの中心軸に冷却パイプを通して、大気の温度分布を調節するというアイデアもある。

降雨の問題も単純ではない。前述のような気象条件ではたして雨が作れるのだろうか。自然の降雨、あるいは中心パイプからの水の散布で雨が降ったとして、その落下はコリオリ力により大きく規定されるだろう。これは、比

較的簡単な力学の問題である。

NASA では、スペースコロニーの研究が着実に進められていると聞く。21世紀の人類危機を考える時、スペースコロニーは、その一つの解答を与えてくれるものと考えられる。我々流体力学者としては、スペースコロニーの気象学を展開することにより、何らかの寄与ができることを期待したい。

文 献

Matsuda, T. and Nakagawa, K. 1982 New type of boundary layers in a rapidly rotating gas. preprint KUGD 82-2

Matsuda, T., Sakurai, T. and Takeda, H. 1975 Source-sink flow in a gas centrifuge. J. Fluid Mech. 69, 197-208.

Matsuda, T. 1982 Meteorology in a space colony. preprint KUGD 82-3

三神 尚 1982 遠心法によるウラン同位体の分離：流れと拡散の解析。
日本原子力学会誌, 24, 337-347.

Nakayama, W. and Usui, S. 1974 Flow in rotating cylinder of gas centrifuge. J. Nucl. Sci. Tech. 11, 242-262.

O'Neill, G.K. 1974 The colonization of space. Physics Today Sept., 32-40.

Sakurai, T. and Matsuda, T. 1974 Gasdynamics of a centrifugal machine. J. Fluid Mech. 62, 727-736.